Литература

1. Weyl H. *Bemerkungen zum Begriff der differentialquotienten gebrochener Ordnung* // Vierteljahresschrift der Naturschenden Gesellschaft in Zurich. – 1917. – V. 62. – P. 296-302.

2. Шабозов М. Ш., Тухлиев К. *Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2* // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94. – № 6. – С. 905-914.

3. Тухлиев К. *Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых классов функций* // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2015. – № 1(158). – С. 7-19.

4. Шабозов М.Ш., Темурбекова С.Д. *Значения поперечников классов функций из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона* // Известия Тульского госуниверситета. Естественные науки. – 2012. – Вып.3. – С. 60-68.

THE BEST POLYNOMIAL APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS
HAVING A DERIVATIVE IN THE SENSE OF WEYL

K. Tukhliev

Sharp inequalities between the best approximations of periodic, differentiable in the sense of Weil, functions by trigonometric polynomials and the generalized modulus of continuity of mth order were found.

Keywords: derivative in the Weyl sense, best approximation, Steklov function, modulus of continuity of mth order.

УДК 517.518.823

ОЦЕНКА НОРМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ЭРМИТА-ФЕЙЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

А.И. Федотов[1]

1 *fedotov@mi.ru*; Московский социально-гуманитарный институт

Получены оценки норм интерполяционных операторов Эрмита-Фейера в одномерных в многомерных пространствах Соболева. Показано, что в одномерном случае норма этого оператора ограничена. В многомерном же случае величина нормы зависит от соотношения числа узлов по каждой координате.

Ключевые слова: интерполяционный оператор Эрмита-Фейера, пространства Соболева.

1. Одномерный случай

Будем, как обычно, обозначать через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0$ – множество натуральных чисел дополненных нулем, $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, а $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Зафиксируем $s \in \mathbb{R}$ и обозначим через H^s пространство Соболева порядка s, то есть замыкание всех 2π-периодических комплекснозначных функций одной переменной относительно нормы

$$\|x\|_{H^s} = \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\,\widehat{x}(l)\,|^2\,\underline{l}^{2s}\right)^{1/2}, \ \underline{l} = \begin{cases} |\,l\,|, & l\neq 0, \\ 1, & l=0, \end{cases} \quad l\in\mathbb{Z},$$

где

$$\widehat{x}(l) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} x(\tau)\bar{e}_l(\tau)d\tau,\ l\in\mathbb{Z},$$

суть коэффициенты Фурье функции $x\in H^s$ по системе функций $e_l(\tau)=e^{il\tau}$, $l\in\mathbb{Z}$.

Всюду в дальнейшем в этом разделе будем полагать выполненным условие $s>1/2$, которое (см., напр., [1], стр. 25) обеспечивает вложение пространства H^s в пространство непрерывных функций, а пространства H^{1+s} в пространство функций, первая производная которых непрерывна.

Зафиксируем $n\in\mathbb{N}_0$, введем на $[-\pi,\pi]$ сетку равноотстоящих узлов

$$t_k = \frac{2\pi k}{2n+1},\ |\,k\,|\leq n, \tag{1}$$

и обозначим через $P_n : H^{1+s}\to H^{1+s}$,

$$(P_n x)(\tau) = \sum_{|k|\leq n}(x(t_k)+ix'(t_k)(1-e_1(\tau-t_k)))\xi_n(\tau,t_k),$$

оператор Эрмита–Фейера, который каждой функции $x\in H^{1+s}$ ставит в соответствие тригонометрический интерполяционный полином Эрмита–Фейера $P_n x\in H^{1+s}$ по узлам (1) первой кратности. Здесь

$$\xi_n(\tau,t_k) = \left(\frac{\sin((2n+1)(\tau-t_k)/2)}{(2n+1)\sin((\tau-t_k)/2)}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{|l|\leq 2n}(2n+1-|\,l\,|)e_l(\tau-t_k),\ |\,k\,|\leq n,$$

нормализованные ядра Фейера по узлам (1).

Теорема 1. *Для любых $s\in\mathbb{R}$, $s>1/2$, и $n\in\mathbb{N}_0$ справедлива оценка*

$$\|P_n\|_{H^{1+s}\to H^{1+s}} \leq 2\sqrt{\zeta(2s)},$$

где $\zeta(t)=\sum_{j=1}^{\infty} j^{-t}$ – дзета-функция Римана, ограниченная и убывающая при $t>1$.

Обозначим через $\mathcal{T}_n$ множество тригонометрических комплекснозначных полиномов

$$\mathcal{T}_n = \operatorname{span}\{e_l(\tau)\mid -2n\leq l\leq 2n+1\},$$

а через $E_n(x)_s$ – наилучшее приближение функции $x\in H^{1+s}$ полиномами из $\mathcal{T}_n$. Известно, что в гильбертовом пространстве наилучшее приближение функции доствляет отрезок ее ряда Фурье

$$E_n(x)_{1+s} = \inf_{x_n\in\mathcal{T}_n}\|x-x_n\|_{H^{1+s}} = \|x-Q_n x\|_{H^{1+s}},\ (Q_n x)(t) = \sum_{l=-2n}^{2n+1}\widehat{x}(l)e_l(\tau).$$

Теорема 2. *Для любых $n \in \mathbb{N}_0$, и $\sigma, s \in \mathbb{R}$, $s > 1/2$, $0 \le \sigma \le s$, и любой функции $x \in H^{1+s}$ справедлива оценка*

$$\|x - P_n x\|_{H^{1+\sigma}} \le \sqrt{4\zeta(2s) - 1}(2n+1)^{\sigma - s} E_n(x)_{1+s}.$$

2. Многомерный случай

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$, и пусть

$$\mathbf{N} = \mathbb{N}^m,\ \mathbf{N_0} = \mathbb{N}_0^m,\ \mathbf{Z} = \mathbb{Z}^m,\ \mathbf{R} = \mathbb{R}^m, \Delta = [-\pi, \pi]^m \subset \mathbf{R}$$

декартовы степени множеств натуральных чисел, натуральных чисел, дополненных нулем, целых чисел, действительных чисел и отрезка $[-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$ соответственно. Для элементов $\mathbf{l} = (l_1, l_2, ..., l_m)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_m)$ этих множеств (m-компонентных векторов) наряду с обычными операциями сложения, вычитания и умножения на число введем следующие операции:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{k} = \sum_{j=1}^{m} l_j k_j,\ \mathbf{l}^2 = \sum_{j=1}^{m} l_j^2.$$

Кроме того, будем для краткости писать $\min(\mathbf{n})$ вместо

$$\min_{1 \le j \le m} \{n_j \mid \mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_m) \in \mathbf{N_0}\}.$$

Для фиксированного $s \in \mathbb{R}$ обозначим через H^s m-мерное пространство Соболева, то есть замыкание относительно нормы

$$\|u\|_{H^s} = \{\sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{Z}} \underline{\mathbf{l}}^{2s} \mid \widehat{u}(\mathbf{l}) \mid^2\}^{\frac{1}{2}},\ \underline{\mathbf{l}} = \begin{cases} \sqrt{\mathbf{l}^2} &, \ \mathbf{l} \ne \mathbf{0}, \\ 1 &, \ \mathbf{l} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \mathbf{l} \in \mathbf{Z},$$

где

$$\widehat{u}(\mathbf{l}) = (2\pi)^{-m} \int_\Delta u(\tau) \bar{e}_{\mathbf{l}}(\tau) d\tau,\ \mathbf{l} \in \mathbf{Z},$$

суть коэффициенты Фурье функции $u \in H^s$ по системе функций

$$e_{\mathbf{l}}(\tau) = \exp(i\mathbf{l} \cdot \tau),\ \mathbf{l} = (l_1, l_2, ..., l_m) \in \mathbf{Z},\ \tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m) \in \Delta,$$

множества всех m-мерных гладких 2π-периодических по каждой переменной комплекснозначных функций от m переменных, определенных на гиперкубе Δ.

Всюду в дальнейшем будем полагать выполненным условие $s > m/2$, при котором (см., напр., [1]) пространство H^s вкладывается в пространство непрерывных функций, а пространство H^{1+s} – в пространство функций, первые производные которых непрерывны.

Зафиксируем $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_m) \in \mathbf{N_0}$, пусть

$$\mathbf{I}_{\mathbf{n},1} = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_m) \in \mathbf{Z} \mid \mid k_j \mid \le n_j,\ j = 1, 2, ..., m, \},$$

индексное множество. Введем на Δ сетку узлов

$$\Delta_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{t_k} = (t_{k_1}, t_{k_2}, ..., t_{k_m}) \mid \mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_m) \in \mathbf{I}_{\mathbf{n},1},$$

$$t_{k_j} = \frac{2\pi k}{2n_j + 1}, \ | \, k_j \, | \leq n_j, \ j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Обозначим через $P_{\mathbf{n}} : H^{1+s} \to H^{1+s}$,

$$(P_{\mathbf{n}} u)(\tau) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{I}_{\mathbf{n},1}} (u(\mathbf{t_k}) + i \mathbf{u}'_\tau(\mathbf{t_k}) \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{e_1}(\tau - \mathbf{t_k}))) \xi_{\mathbf{n}}(\tau, \mathbf{t_k}),$$

$$\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{N},$$

оператор Эрмита-Фейера, который каждой функции $u \in H^{1+s}$ ставит в соответствие тригонометрический интерполяционный полином Эрмита-Фейера $P_{\mathbf{n}} u \in H^{1+s}$ по узлам $\Delta_{\mathbf{n}}$ первой кратности. Здесь

$$\mathbf{u}'_\tau(\mathbf{t_k}) = (u'_{\tau_1}(\mathbf{t_k}), u'_{\tau_2}(\mathbf{t_k}), \ldots, u'_{\tau_m}(\mathbf{t_k}))$$

вектор значений производных функции $u \in H^{1+s}$ по каждой переменной-компоненте вектора $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in \Delta$ в точке $\mathbf{t_k} \in \Delta_{\mathbf{n}}$,

$$\mathbf{e_1}(\tau - \mathbf{t_k}) = (e_1(\tau_1 - t_{k_1}), e_1(\tau_2 - t_{k_2}), \ldots, e_1(\tau_m - t_{k_m}))$$

вектор-функция, а

$$\xi_{\mathbf{n}}(\tau, \mathbf{t_k}) = \prod_{j=1}^{m} \xi_{n_j}(\tau_j, t_{k_j})$$

нормализованное ядро Фейера по узлам $\Delta_{\mathbf{n}}$.

Теорема 3. *Для любых $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $s \in \mathbb{R}$, $s > m/2$ и $\mathbf{n} \in \mathbf{N_0}$ справедлива оценка*

$$\|P_{\mathbf{n}}\|_{H^s_\rho \to H^s_\rho} \leq 2^m m^{1+s/2} M^{1+s}(2\mathbf{n} + \mathbf{1}) \sqrt{\zeta(2s - m + 1)}, \ M(2\mathbf{n} + \mathbf{1}) = \frac{\sqrt{(2\mathbf{n} + \mathbf{1})^2}}{\min(2\mathbf{n} + \mathbf{1})}.$$

Литература

1. Тейлор М. *Псевдодифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1985. – 469 с.

NORM ESTIMATION OF THE HERMITE-FEJER INTERPOLATION OPERATOR
IN SOBOLEV SPACES

A.I. Fedotov

We obtain an estimate of the norm of the Hermite-Fejer interpolation operator in one-dimensional and multidimensional Sobolev spaces. It is shown that in the one-dimensional case the norm of this operator is bounded. In the multidimensional case the norm of this operator depends on the choice of the nodes.

Keywords: Hermite-Fejer interpolation operator, Sobolev spaces.